Baccalauréat ES Polynésie 10 juin 2011

Exercice 1 — 4 points

Commun à tous les candidats

1. VRAI

Sur l'intervalle $]-\infty~;~1[$, f est continue, strictement décroissante (cf tableau de variation fourni). Et l'intervalle image de $]-\infty~;~1[$ est $]-\infty~;~2[$. Or 0 appartient à cet intervalle. Selon le cas particulier du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=0$ admet une et une seule solution sur $]-\infty~;~1[$.

De plus, sur $]1~;~+\infty[$, f admet 3 pour minimum. Alors, l'équation $f(x)=0$ n'admet pas de solution sur cet intervalle. Finalement, l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution sur $]-\infty~;~1[\cup]1~;~+\infty[$.

2. FAUX

La droite d'équation $y=1$ n'est ni asymptote en $-\infty$ (la limite de f est 2), ni asymptote en $+\infty$ (la limite de f est infinie).

3. FAUX

La fonction f est décroissante sur l'intervalle $]1~;~6]$. Donc sur cet intervalle, $f'(x)$ est négatif. Il existe donc au moins un réel x tel que $f'(x)\geqslant 0$ soit faux.

4. FAUX

La fonction f est strictement positive sur $]1~;~6]$. Or $F'=f$. Donc $F'>0$. D'où F est croissante sur $]1~;~6]$.

5. ON NE PEUT PAS CONCLURE

On sait que : $\ln[f(x)]$ existe $\iff$ $f(x)$ définie et $f(x)>0$. Sur $]-\infty~;~0]$, l'image de x par f est parfaitement définie. Mais, on ne connaît pas le signe de f sur cet intervalle. Il se pourrait, par exemple, que $f(0)$ soit négatif !

6. **a.** VRAI

Par composition des fonctions, on a : $g(6)=\mathrm{e}^{f(6)}=\mathrm{e}^3$.

b. FAUX

On a $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\x<1}} f(x)=-\infty$ et $\displaystyle\lim_{X\to-\infty}\mathrm{e}^X=0$ donc $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\x<1}}\mathrm{e}^{f(x)}=0$, soit $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\x<1}} g(x)=0$.

c. FAUX

On a : $g'(x)=f'(x)\times\mathrm{e}^{f(x)}$. Or $\mathrm{e}^{f(x)}>0$. Donc $g'(3)$ est du signe de $f'(3)$. Or sur $]1~;~6]$, f est décroissante. Alors $f'(3)<0$. D'où $g'(3)<0$.

Exercice 2 — 5 points

Commun à tous les candidats

Partie A

1. **a.** À l'aide de la calculatrice, on obtient une équation de la droite d'ajustement affine D de y en x par la méthode des moindres carrés (coefficients arrondis à 10^{-2}) : $y=-4,17x+299,33$.

b. On trace D à l'aide de deux points (le point moyen G du nuage, non exigé, appartient à D).

2. Méthode libre ! Lecture graphique pour $x = 12\ldots$
   On préférera un calcul :
   Pour $x = 12$, on a $y_{12} = -4,17 \times 12 + 299,33 = 249,29$. Que l'on arrondit à 249 milliers de mariages.

Partie B

1. 0n représente le nuage de points $N_i\,(x_i\ ;\ Y_i)$.
2. Tableau :

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Z_i	2,77	2,71	3,04	3,26	3,50	3,97	4,16	4,56	4,93

3. **a.** On sait que : $Z = 0,29x + 2,51$ et que $Z = \ln(Y)$.
   Ainsi, $\ln(Y) = 0,29x + 2,51$ qui équivaut à : $Y = \mathrm{e}^{0,29x+2,51} = \mathrm{e}^{0,29x} \times \mathrm{e}^{2,51} \approx 12,30\mathrm{e}^{0,29x}$. (le coefficient 12,30 étant arrondi)
   On a bien $Y = 12,30 \times \mathrm{e}^{0,29x}$ pour ce nouvel ajustement.

   b. En 2012, $x = 12$. Alors $Y_{12} = 12,30 \times \mathrm{e}^{O,29\times 12} \approx 399,25$. Que l'on arrondit à 399 milliers.

Partie C

Il est toujours possible de travailler graphiquement en déterminant, par lecture, à partir de quelle valeur entière de x la courbe (C) d'équation $y = 12,30 \times \mathrm{e}^{0,29x}$ va passer au-dessus de la droite D d'équation $y = -4,17x + 299,33$.
Car, par le calcul, cela revient à résoudre l'inéquation : $12,30 \times \mathrm{e}^{0,29x} > -4,17x + 299,33$! Pas de méthode algébrique simple ! Alors, utilisons la calculatrice ...
La fonction affine représentée par D est décroissante, tandis que la fonction représentée par la courbe (C) est croissante. Nous allons déterminer le « point de bascule » à l'aide de la table de valeurs de la calculatrice. On trouve :

x	Fonction (C)	Fonction affine (D)
10	257,63	223,54
11	253,46	298,75

C'est à partir de 2011 que, pour la première fois, le nombre de pacs dépassera celui des mariages.

Exercice 3 — 5 points

Enseignement obligatoire

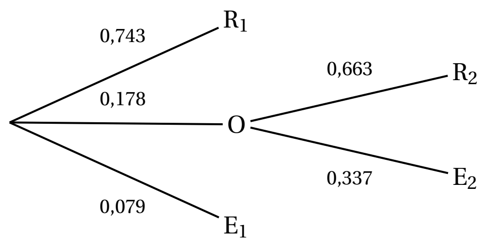
1. A partir de l'énoncé, puisque l'on est en situation d'équiprobabilité (le candidat interrogé étant choisi au hasard) :
   $p\,(\mathrm{R}_1) = \dfrac{74,3}{100} = 0,743$; $p(\mathrm{O}) = \dfrac{17,8}{100} = 0,178$; $p\,(\mathrm{E}_1) = 1 - \left[p\,(\mathrm{R}_1) + p(\mathrm{O})\right] = 0,079$.
2. Un candidat admis est reçu au premier tour ou est reçu après avoir passé l'oral de rattrapage.
   L'évènement A peut s'écrire : $\mathrm{A} = \mathrm{R}_1 \cup (\mathrm{O} \cap \mathrm{R}_2)$ et $p\,(\mathrm{O} \cap \mathrm{R}_2) = p(\mathrm{A}) - p\,(\mathrm{R}_1) = 0,861 - 0,743 = 0,118$.
   Interprétation : 11,8 % des candidats ont été reçus au rattrapage.

3. Calcul d'une probabilité conditionnelle.

$$p_{\mathrm{O}}\left(\mathrm{R}_2\right) = \dfrac{p\left(\mathrm{O} \cap \mathrm{R}_2\right)}{p(\mathrm{O})} = \dfrac{0,118}{0,178} \approx 0,663.$$

Interprétation : 66,3 % des candidats admis à l'oral de rattrapage ont été reçus.

4. Arbre de probabilités. L'arbre pondéré décrivant la situation est :



5. On interroge au hasard trois candidats et l'on considère que les trois réponses sont indépendantes les unes des autres. Il s'agit d'un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 3$ (l'expérience est répétée 3 fois dans les mêmes conditions) et $p = p(\mathrm{A}) = 0,861$ (probabilité du succès).

Soit Z la variable aléatoire comptabilisant le nombre de succès, c'est-à-dire le nombre de candidats admis parmi les trois candidats interrogés.

a. La probabilité que les trois candidats aient été admis est : $p_1 = p(Z = 3) = p(\mathrm{A})^3 = (0,861)^3 \approx 0,638$.

b. La probabilité qu'au moins deux des trois candidats aient été admis est : $p_2 = p(Z = 2) + p(Z = 3) = 3 \times (0,861)^2 \times 0,139 + (0,861)^3 \approx 0,947$.

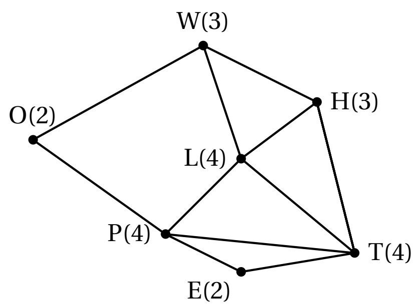
Pour $p(Z = 2)$, il Y a trois chemins à considérer sur l'arbre à trois niveaux

Exercice 3 — 5 points

Enseignement de spécialité

Partie A

Voici le graphe avec les degrés des sommets.



1. Le graphe est connexe. Or, d'après le théorème d'Euler :

- un graphe connexe admet une chaine eulérienne si, et seulement si, le nombre de sommets de degré impair est 0 ou 2.

- un graphe connexe admet un cycle eulérien si, et seulement si, tous ses sommets sont de degré pair.

W et H sont les seuls sommets de degré impair. Le graphe admet donc une chaine eulérienne. W et H étant pris pour points de départ et d'arrivée, en voici une :

W–O–P–L–W–H–L–T–P–E–T–H

2. Selon le 1., puisque tous les sommets ne sont pas de degré pair, le graphe n'admet pas de cycle eulérien.
3. Le graphe n'est pas orienté. Ainsi, sa matrice M associée est une matrice symétrique.

   L'élément a_{ij} de la matrice M est égal au nombre de chaines de longueur 1 reliant le sommet i au sommet j. Les sommets étant pris dans l'ordre alphabétique EHLOPTW, la matrice M est la suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Partie B

1. Utilisons l'algorithme de détermination d'une plus courte chaîne de Dijkstra. Le sommet O est le sommet de départ et T est celui d'arrivée.

   On obtient la plus courte chaîne : O - P - L - H - T de poids 46.

O	W	P	L	H	E	T
0	15, O	13, O	∞	∞	∞	∞
	15, O	13, O	18, P	∞	28, P	47, P
	15, O		18, P	29, W	28, P	47, P
			18, P	26, L	28, P	47, P
				26, L	28, P	46, H
					28, P	46, H
						46, H

2. Le plus court chemin de O à T est de poids 46, ce qui correspond à 46 minutes de déplacement pour Arthur.

   Mais, comme celui-ci ne dispose que de 40 minutes pour arriver à Temple, il sera en retard de 6 minutes sur l'horaire fixé par les organisateurs du séjour !

Exercice 4 — 6 points

Commun à tous les candidats

Il s'agit d'étudier $f(x) = 17280\text{e}^{-0{,}024x}$.

1. En 2011, $x = 11$. Donc on calcule $f(11) \approx 13271$ au billion près.
2. La limite de f en $+\infty$.

   On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \text{e}^{-0{,}024x} = 0$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$
3. $f = k\text{e}^{v}$. Donc $f' = kv'\text{e}^{v}$. Pour tout nombre réel x de $[11\,;\,+\infty[$: $f'(x) = 17280 \times (-0{,}024)\text{e}^{-0{,}024x} = -414{,}72\text{e}^{-0{,}024x}$.

   Donc $f'(x) < 0$. Alors f est strictement décroissante sur $[11\,;\,+\infty[$.

x	11	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	m $\searrow$	0

avec $m \approx 13\,271$.

4. NON ! f admet pour maximum m. Or $m < 15\,000$. Donc il n'existe pas de valeur de x telle que $f(x) = 15\,000$.

5. NON ! f admet pour limite 0 en plus l'infini. Donc on peut trouver x tel que $f(x) < 6000$.

Détermination de l'année :

$f(x) < 6000 \iff \mathrm{e}^{-0,024x} < \dfrac{6000}{17280} \iff -0,024x < \ln\left(\dfrac{6000}{17280}\right) \iff$

$x > \dfrac{\ln\left(\frac{6000}{17280}\right)}{-0,024}$. Or $\dfrac{\ln\left(\frac{6000}{17280}\right)}{-0,024} \approx 44,07$.

Donc on prend $x \geqslant 45$. Les découvertes de pétrole deviendront strictement inférieures à 6 000 billions de barils à partir de 2045.

Vérification : $x = 44$; $f(44) \approx 6011$ et $x = 45$; $f(45) \approx 5\,868$.

6. **a.** f est une fonction continue sur l'intervalle $[11~;~+\infty[$. Elle admet donc des primitives sur cet intervalle. Soit F l'une de ses primitives. On a alors :

$f(x) = 17\,280\mathrm{e}^{-0,024x}$, donc $F(x) = 17280 \times \dfrac{1}{-0,024}\mathrm{e}^{-0,024x} = -720\,000\mathrm{e}^{-0,024x}$.

b. On a ensuite : $I = \displaystyle\int_{11}^{21} f(x)\mathrm{d}x = F(21) - F(11) = -720\,000\left(\mathrm{e}^{-0,504} - \mathrm{e}^{-0,264}\right)$.

$$\int_{11}^{21} f(x)\,\mathrm{d}x \approx 117\,982 \quad \text{à l'unité près}$$

c. On cherche la valeur moyenne v de f sur l'intervalle $[11\,;\,21]$.

$$v = \frac{1}{21-11} \times \int_{11}^{21} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{I}{10} \approx 11\,798$$

D'après ce modèle, on peut espérer découvrir 11 798 billions de barils par an.

Jean-Paul Blaineau